

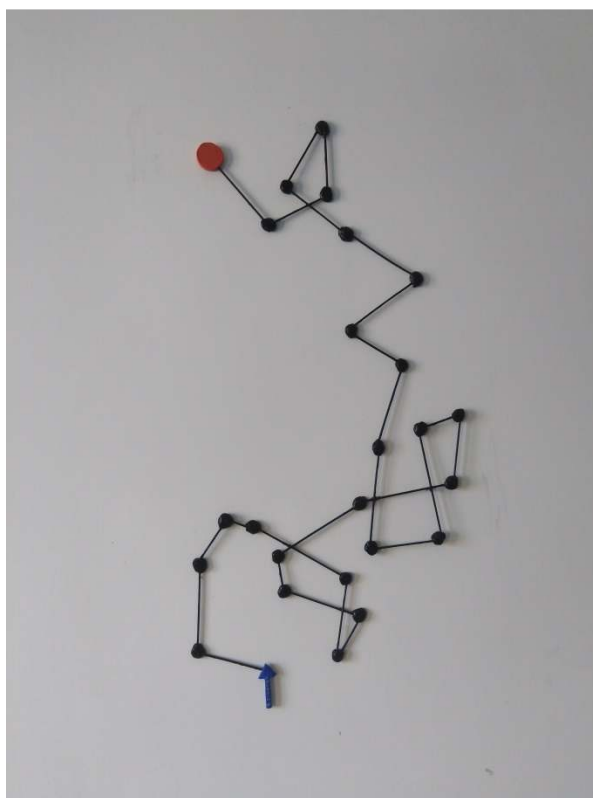
**MOSTRA - CONCORSO 2021:  
ENTROPIA**

Ente organizzatore: Studio Lab 138 di Laura Giovanna Bevione  
Via del mare, 138 – Pavona di Castel Gandolfo

**Progetto Opera:**

## **Passeggiata costante di Boltzmann**

a cura di Roberto Zingoni



Roma, 12 maggio 2021

## Introduzione

Entropia è il titolo del concorso organizzato dallo Studio Lab 138 e nella locandina viene indicata l'equazione dell'entropia, scritta da Ludwig Eduard Boltzmann utilizzando il linguaggio della meccanica statistica, e di seguito riportata:

$$S = k \log \Omega$$

In questa relazione  $S$  è la grandezza entropia,  $\Omega$  è il numero di stati dinamici che corrispondono allo stato termodinamico che si considera e  $k$  è una costante fondamentale chiamata costante di Boltzmann. Tale relazione mostra il legame indissolubile tra entropia e costante di Boltzmann.

Il valore di questa costante può essere determinato a partire da misure su traiettorie caotiche come quelle delle particelle Browniane, che sono corpi che misurano 1 milionesimo di metro in sospensione in un liquido.

L'opera realizzata rappresenta una di queste traiettorie browniane, e il corrispondente valore della costante di Boltzmann, che ho misurato è riportato nel presente progetto.

Inoltre, descrivo il modo di realizzazione del supporto per la messa in sospensione della traiettoria browniana.

Il titolo dell'opera è "cammino costante di Boltzmann" in quanto la traiettoria browniana è spesso indicata dai fisici come cammino o passeggiata dell'ubriaco.

Il presente lavoro vuole essere un ponte tra due diversi approcci culturali, quale quello fisico e artistico visto che la cultura è universale anche se si manifesta in forme diverse.

Il presente lavoro si articola in due parti:

Parte 1 – Determinazione della traiettoria Browniana e misura della costante di Boltzmann

Parte 2 – Realizzazione della traiettoria Browniana e suo supporto (arte)

## Parte 1 – Determinazione della traiettoria Browniana misura della costante di Boltzmann

### 1.1 Il moto browniano e relazioni teoriche

Se si pongono in sospensione in un fluido (liquido o gas) corpuscoli di dimensioni pari o inferiori al milionesimo di metro, si osserva (al microscopio) che ciascuno è oggetto di un moto inarrestabile, frenetico, con traiettoria assolutamente irregolare, a zigzag : è il moto browniano, così chiamato in onore del botanico inglese Robert Brown che lo descrisse, per la prima volta, in un resoconto scientifico nel 1828. La spiegazione teorica del fenomeno venne elaborata, indipendentemente e simultaneamente, da A. Einstein, da M. Smoluchowski e da P. Langevin nel periodo compreso tra il 1905 e il 1908, e stabilisce un'equazione fondamentale che lega la costante di Boltzmann a grandezze misurabili e/o definite di seguito riportata:

$$\frac{\langle \xi^2 \rangle}{\Delta t} = kT \frac{1}{3\pi\eta r} \quad (1)$$

dove:

- $\langle \xi^2 \rangle$  è la media quadratica della proiezione degli spostamenti browniani nel tempo  $\Delta t$ ;
- $\Delta t$  è il tempo di durata dell'osservazione;
- $k$  è la costante di Boltzmann;
- $T$  è la temperatura assoluta della sospensione browniana;
- $\eta$  è il coefficiente di viscosità;
- $r$  è il raggio del corpuscolo browniano.

L'equazione (1) può essere scritta, esplicitando,  $k$  come:

$$k = \frac{3\pi\eta r \langle \xi^2 \rangle}{T \Delta t} \quad (2)$$

Poiché  $T$ ,  $\eta$ ,  $r$  e  $\Delta t$  sono misurabili e fissati, la relazione (2) permette di determinare la costante di Boltzmann  $k$ , se misuriamo e determiniamo lo spostamento quadratico medio  $\langle \xi^2 \rangle$  nel tempo di osservazione  $\Delta t$  in ciascuna direzione. Al tal fine ho realizzato la seguente esperienza sperimentale.

### 1.2 Preparazione della sospensione browniana e allestimento del vetrino

Per la preparazione della soluzione browniana ho utilizzato come fluido acqua distillata e come oggetti sospesi, o corpi browniani, palline sferiche di latex del diametro pari a  $d = (1,1 \pm 0,1)10^{-6}$  m, che sono facilmente reperibili in commercio sotto forma di sospensione omogenea. Ho diluito ulteriormente il preparato con gocce di acqua distillata nel rapporto 1 a 10.

**Tabella n° 1 - sostanze costituenti la sospensione browniana**

sostanza	caratteristiche
palline sferiche di latex	$d = (1,1 \pm 0,1)10^{-6}$ m
acqua distillata	coeff. viscosità a 293 °K, $\eta = (10^{-3} \pm 0,1)Ns/m^2$

Le quantità di sospensione e di corpi browniani sopra indicati, sono state messe in un recipiente dove viene effettuata un'operazione di mescolamento, facilmente realizzabile con una sottile asta di vetro. Mescolata la sospensione browniana, si preleva, con una pivetta, una piccola goccia della sospensione che viene depositata su un vetrino a contenitore piatto (di profondità pari a 0,1 mm). Il tutto viene coperto, con un copri-vetrino e sigillato lacca per capelli, per evitare l'evaporazione della sospensione browniana. La sospensione browniana è pronta per l'osservazione.

### 1.3 Disposizione sperimentale

Per osservare i corpi browniani, e quindi il loro moto, ho realizzato una esperienza di laboratorio che consenta di ingrandire le dimensioni lineari dei corpi browniani di un fattore cento o mille, in quanto i nostri organi visivi riescono a percepire lunghezze non inferiori al decimo di millimetro. L'esperienza realizzata fa uso di un microscopio, al cui oculare è stata montata la telecamera del mio smartphone come mostrato nella foto seguente:



Figura 1

Tale disposizione sperimentale permette di registrare le immagini captate dal microscopio che possono essere riviste su un computer. Si riportano una foto dello schermo del computer che mostra i corpi browniani.



### 1.4 Osservazione della sospensione browniana e sua registrazione

Per osservare i moti browniani ho posto il vetrino a contenitore piatto, contenente la soluzione browniana, sul porta oggetti del microscopio che é munito di oculare micrometrico del tipo 40X. Quindi sono passato alla messa a fuoco della soluzione browniana, mediante vite macrometrica, determinando le condizioni di migliore visibilità dei corpi browniani.

*“Ciascuno di essi, anziché cadere regolarmente, é animato da un movimento molto vivo e perfettamente disordinato. Esso (il corpo browniano) va e viene volteggiando, sale, scende, risale ancora, senza tendere in alcun modo verso la quiete.”<sup>1</sup>*

Detti movimenti vengono registrati e poi visualizzati sul computer. La mia esperienza ha prodotto un filmato, del fenomeno in questione, della durata di 14 minuti circa.

### 1.5 Misure sperimentali

Nel paragrafo 1.1 abbiamo indicato quali grandezze devono essere misurate per stimare la costante di Boltzmann. Dette grandezze sono:

---

<sup>1</sup> J. Perrin, Gli Atomi, Editori Riuniti, (1981), pag. 112.

- il tempo di osservazione,  $\Delta t$ , stabilito dallo sperimentatore;
- la media quadratica della proiezione degli spostamenti browniani nel tempo  $\Delta t$ ,  $\langle \xi^2 \rangle$
- e la temperatura in gradi Kelvin,  $T$ , della sospensione browniana.

In particolare, lo spostamento quadratico medio é la media aritmetica del quadrato degli spostamenti del corpo browniano in una data direzione,  $\xi_{xi}$  o  $\xi_{yi}$ , e per tempo di osservazione fissato; in formule:

$$\langle \xi^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\xi_{xi}^2 + \xi_{yi}^2}{n} \quad (3)$$

per questa equazione, lo spostamento quadratico medio sar  determinato eseguendo misure di spostamento del corpo browniano, in una data direzione, e per tempo di osservazione fissato.

L'elenco degli strumenti utilizzati sono elencati nella tabella n  2 mentre quello dei materiali utilizzati   riportato nella tabella n  3.

**Tabella n  2 - Strumenti di misura -**

Strumento	Marca	Unit� di misura	errore
contasecondi	-	s	0.01 s
riga	-	m	0.0005 m
termometro	-	�K	0,2 �K

**Tabella n  3 - materiali-**

Tipo	quantit�
fogli di carta millimetrata	> 2
fogli di acetato (lucidi)	> 2
pennarello	1
matita	1
nastro isolante	1
reticolo a diffrazione di passo 100 linee/mm	1

### 1.6 Errori di misura

Gli errori delle grandezze sono di seguito riportate e per quello sulla costante di Boltzmann   stata calcolata la propagazione dell'errore:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \pm 0,05 \text{ s} & \Delta T &= \pm 1 \text{  K} & \Delta \langle \xi^2 \rangle &= \pm 0,4 (\mu\text{m})^2 \\ \Delta \eta &= \pm 0,1 \text{ Ns/m}^2 & \Delta r &= \pm 0,5 \mu\text{m} \end{aligned}$$

$$\Delta k = 3\pi \left( \frac{r \langle \xi^2 \rangle \Delta \eta}{Tt} + \frac{\eta \langle \xi^2 \rangle \Delta r}{Tt} + \frac{\eta r \Delta \langle \xi^2 \rangle}{Tt} - \frac{\eta r \langle \xi^2 \rangle \Delta t}{Tt^2} - \frac{\eta r \langle \xi^2 \rangle \Delta T}{tT^2} \right)$$

### 1.7 Taratura dell'apparecchiatura

Prima di effettuare le misure   stato necessario stabilire la scala delle lunghezze misurate sullo schermo del computer. Detta operazione   stata fatta ponendo sul piatto del microscopio un reticolo di diffrazione che nel mio caso aveva un passo di 100 linee/mm. Le linee del reticolo sono state proiettate sullo schermo del computer e quindi   stata misurata la lunghezza,  $d$ , tra due linee vicine. Allora  $d$  corrisponder  all'inverso del passo reticolare. In questa esperienza la distanza  $d$  tra due linee vicine del reticolo misurata sullo schermo del computer    $d = (1,05 \pm 0,5) \text{ cm}$  che pertanto corrisponde a  $10^{-5} \text{ m}$  nel piano d'azione della sospensione browniana.

### 1.8 Fissazione delle posizioni dei corpi browniani per tempi di osservazioni stabiliti e misura della temperatura.

Si può ora procedere alla determinazione delle posizioni dei corpi browniani, che consentiranno di determinare gli  $\xi_{xi}$  o  $\xi_{yi}$ , per multipli di tempo di osservazione,  $\Delta t$ , è stato di 20 s.

Dopo aver fissato sullo schermo del computer un foglio di acetato (lucido), si fa partire il filmato del moto browniano registrato.

Quindi si sceglie una particella browniana e, con un pennarello, si fissa sul lucido la sua posizione iniziale e quelle occupate a multipli di tempo di osservazione controllato con il contasecondi. Man mano che si procede, le posizioni segnate sul lucido devono essere contrassegnate da numeri naturali progressivi.

La temperatura della soluzione browniana, prima e dopo la misura, è stata di:

$$T = (297 \pm 1) \text{ } ^\circ\text{K}$$

### 1.9 Costruzione delle traiettorie browniane e determinazione dello spostamento quadratico medio e della costante di Boltzmann.

La procedura esplicitata nel paragrafo precedente permette di ottenere figure "simili" a quella di figura:



figura 2

dove nel nostro caso il punto 2 è stato segnato, dall'inizio dell'operazione di misura, dopo 20 s, il punto 3 dopo 40 s e ecc.; dette figure vengono copiate, per sovrapposizione, su fogli di carta millimetrata.

Congiungendo, nel rispetto della numerazione, i punti ottenuti si ottengono le "tipiche" linee spezzate del moto browniano, che per la figura 2 diventa:

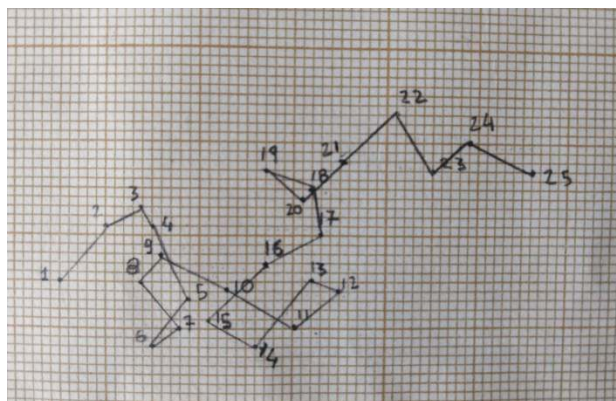


figura 3

Quindi si quantificano le proiezioni,  $\xi_{xi}$  e  $\xi_{yi}$ , di ciascun segmento lungo gli assi cartesiani x, y centrati, di volta in volta, sui punti numerati e con stessa orientazione la traslazione del sistema di riferimento è lecita perché, secondo la teoria cinetica, gli urti molecolari sono scorrelati tra di loro o avvengono in maniera del tutto casuale. Ma non solo. Questa ipotesi permette anche di considerare le proiezioni  $s_x$  e  $s_y$  tra loro indipendenti e quindi hanno lo stesso peso ai fini della stima dello spostamento quadratico medio  $\langle s^2 \rangle$  in una data direzione. In sostanza l'ipotesi di casualità permette di eseguire misure simili in diversi sistemi di riferimento o laboratori senza alterare le misure stesse.

I valori di  $\xi_{xi}$  e  $\xi_{yi}$ , ottenuti dalla figura 3, sono riportati nella tabella n° 5 dove nella prima colonna abbiamo indicato il segmento considerato, nella 2 e 3 colonna rispettivamente i valori misurati, con la riga, di  $\xi_{xi}$  e  $\xi_{yi}$ , e nella 4 e 5 colonna i loro valori quadrati.

**Tabella n° 5 - misure sperimentali -**

n° segmento iesimo	$\xi_{xi} \pm \Delta \xi_x$ ( $\mu\text{m}$ )	$\xi_{yi} \pm \Delta \xi_y$ ( $\mu\text{m}$ )	$\xi_{xi}^2 \pm \Delta \xi_x^2$ ( $\mu\text{m}$ ) <sup>2</sup>	$\xi_{yi}^2 \pm \Delta \xi_y^2$ ( $\mu\text{m}$ ) <sup>2</sup>
1-2	5 ± 0.05	6 ± 0.05	25 ± 0.1	36 ± 0.1
2-3	4 ± 0.05	2 ± 0.05	16 ± 0.1	4 ± 0.1
3-4	1 ± 0.05	2 ± 0.05	1 ± 0.1	4 ± 0.1
4-5	4 ± 0.05	8 ± 0.05	16 ± 0.1	64 ± 0.1
5-6	4 ± 0.05	5 ± 0.05	16 ± 0.1	25 ± 0.1
6-7	3 ± 0.05	2 ± 0.05	9 ± 0.1	4 ± 0.1
7-8	4 ± 0.05	5 ± 0.05	16 ± 0.1	25 ± 0.1
8-9	2 ± 0.05	3 ± 0.05	4 ± 0.1	9 ± 0.1
9-10	7 ± 0.05	4 ± 0.05	49 ± 0.1	16 ± 0.1
10-11	4 ± 0.05	7 ± 0.05	16 ± 0.1	49 ± 0.1
11-12	6 ± 0.05	4 ± 0.05	36 ± 0.1	16 ± 0.1
12-13	3 ± 0.05	1 ± 0.05	9 ± 0.1	1 ± 0.1
13-14	6 ± 0.05	7 ± 0.05	36 ± 0.1	49 ± 0.1
14-15	3 ± 0.05	5 ± 0.05	9 ± 0.1	25 ± 0.1
15-16	6 ± 0.05	6 ± 0.05	36 ± 0.1	36 ± 0.1
16-17	6 ± 0.05	4 ± 0.05	36 ± 0.1	16 ± 0.1
17-18	4 ± 0.05	2 ± 0.05	16 ± 0.1	4 ± 0.1
18-19	5 ± 0.05	2 ± 0.05	25 ± 0.1	4 ± 0.1
19-20	4 ± 0.05	3 ± 0.05	16 ± 0.1	9 ± 0.1
20-21	4 ± 0.05	4 ± 0.05	16 ± 0.1	16 ± 0.1
21-22	6 ± 0.05	5 ± 0.05	36 ± 0.1	25 ± 0.1
22-23	4 ± 0.05	6 ± 0.05	16 ± 0.1	36 ± 0.1
23-24	4 ± 0.05	3 ± 0.05	16 ± 0.1	9 ± 0.1
24-25	7 ± 0.05	4 ± 0.05	49 ± 0.1	16 ± 0.1
25-26	3 ± 0.5	5 ± 0.5	9 ± 0.1	25 ± 0.1

In base all'espressione (3) lo spostamento quadratico medio nel tempo,  $\Delta t = 20$  s, in una direzione è:

$$\langle \xi^2 \rangle = (21,0 \pm 0.1) \text{ mm}$$

Sostituendo nell'equazione (2) il valore trovato e quelli riportati qui di seguito:

$$T = (297 \pm 1) \text{ }^\circ\text{K};$$

$$r = d/2 = (0,55 \pm 0,5) \mu\text{m};$$

$$\eta = (10^{-3} \pm 0,1) \text{Ns/m}^2;$$

$$\Delta t = 20\text{s};$$

si ottiene un valore della costante di Boltzmann:

$$k = (1,8 \pm 0.5) 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$$

e quindi compatibile, entro gli errori sperimentali, con il valore accettato pari a  $k = 1,38 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$

## Parte 2 – Realizzazione della traiettoria Browniana e suo supporto (arte)

Una volta ottenuta per via sperimentale la traiettoria browniana ho ingrandito l'immagine, mediante proiettore e computer, e quindi ridisegnata su un foglio di grandi dimensioni.

I tratti della traiettoria browniana sono stati realizzati con stecche di bambù, opportunamente tagliate, e raccordati tra loro da pastiglie di fimo realizzate a mano e scaldate in forno per circa 40 minuti affinché diventassero solide. La particella browniana, quelle di colore rosso-arancione, è stata realizzata in legno mentre la freccia di colore blu è stata realizzata utilizzando il materiale fimo. Quindi la traiettoria è stata dipinta con colore ad olio.

E bene sottolineare che tale traiettoria può essere fissata alla parete mediante un chiodo come riportato nella foto seguente:

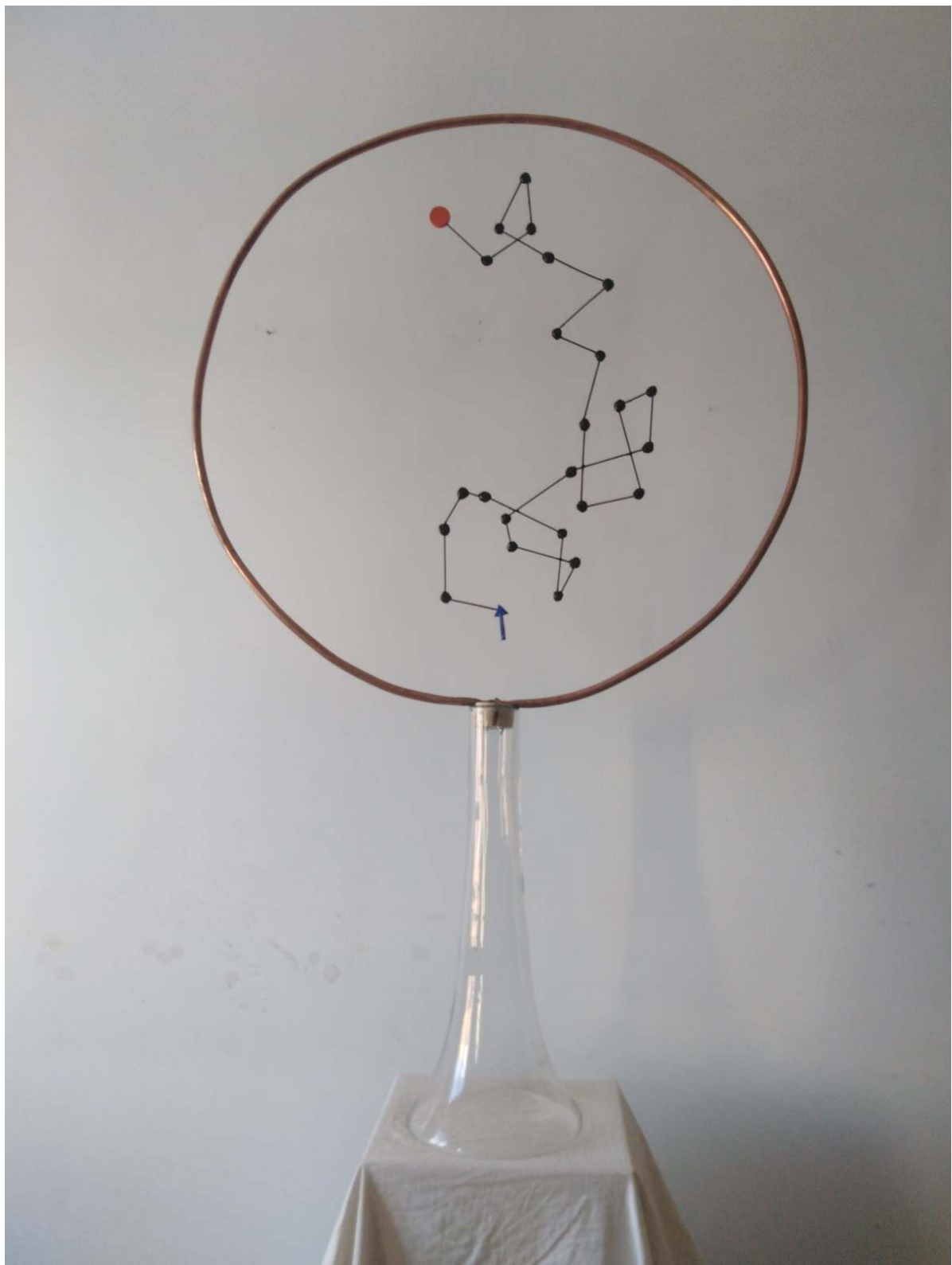


Per il supporto ho utilizzato materiali prevalentemente riciclati come la base in vetro, trovata abbandonata per strada, e il tubo di rame che ho tagliato con una sega per il ferro dopo averlo pulito dalla guaina protettiva. Il punto di congiunzione è un supporto di legno, opportunamente tagliato e cartavetrato, dove ho praticato due fori per poter fissare con viti in acciaio, il tubo di rame piegato a cerchio sulla base di vetro.

Infine, usando filo di nylon ho posizionato la traiettoria browniana all'interno del cerchio di rame che riproduce l'oculare del microscopio. La foto seguente riporta l'opera montata sul supporto:







Le dimensioni del tratto Browniano sono 70 cm x 50 cm

Mentre le dimensioni complessive dell'opera 1,69 m X 1,04 m X 0,29 m